

Optimal kontrollteori

1. og 2. ordens differensialligninger

Klassisk variasjonsregning

Optimal kontrollteori er en utvidelse av klassisk variasjonsregning, som ble utviklet av Euler og Lagrange.

Et vanlig problem i variasjonsregningen er:

$$\max \int_{t_0}^{t_1} F(t, x(t), \dot{x}(t)) dt$$

for $x(t_0) = x_0$ og $x(t_1) = x_1$ der t_0, t_1, x_0 og x_1 er gitte, reelle tall, og F er en funksjon av tre reelle variable. Vil finne funksjonen $x(t)$ som gir det maksimale (eller minimale) integralet.

Eulers ligning

Eulers ligning ble oppdaget i 1744 og er sentral i klassisk variasjonsregning:

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 0$$

der F er en funksjon av tre variable og $x(t)$ er en ukjent funksjon av tiden t .

$$\frac{\partial F}{\partial x} \text{ betyr } \frac{\partial F}{\partial x}(t, x(t), \dot{x}(t))$$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t))$$

$$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt} x(t)$$

Maksimumsprinsippet

Kontrollteorien utvider teorien bak klassisk variasjonsregning. Hovedresultatet i optimal kontrollteori kalles maksimumsprinsippet, utviklet på 1950-tallet. Maksimumsprinsippet gir nødvendige betingelser for optimalitet, i meget generelle problemer i dynamisk optimering.

Innen optimering bestemmer en maksimum og minimum for en funksjon som avhenger av reelle variabler og av andre funksjoner.

Optimal kontrollteori har mange anvendelser:

1. Økonomisk vekst
2. Lagerhold
3. Beskatning
4. Uttømming av naturressurser
5. Rakett-teori

1. ordens differensialligninger

Løsning av differensialligninger står sentralt i optimal kontrollteori. Første ordens differensialligninger er ligninger av typen

$$G(t, x(t), \dot{x}(t)) = 0, \quad \dot{x} = \frac{d}{dt}x, \quad x = x(t)$$

Mange slike ligninger kan skrives

$$\dot{x} = F(t, x)$$

og noen av disse kan løses ved hjelp av eksplisitte formler.

Separable differensialligninger

$$\frac{dx}{dt} = \frac{f(t)}{g(x)}$$

dvs.

$$g(x)dx = f(t)dt$$

$$\int g(x)dx = \int f(t)dt$$

$$G(x) = F(t) + C$$

der

$$F'(t) = f(t), G'(x) = g(x), \text{ og } C \text{ er en vilkårlig konstant.}$$

Hvis $G(x)$ har en invers funksjon, $G^{-1}(x)$ (på et intervall), så har vi

$$x(t) = G^{-1}(x)(F(t) + C)$$

G^{-1} trenger bare å være definert i et intervall.

Eksempel.

$$(1 + t^2)\dot{x} = tx$$

Initialbetingelser:

$$t_0 = 0, \quad x(t_0) = 3$$

Løsning.

$$\frac{dx}{x} = \frac{t}{(1+t^2)} dt$$

Foretar integrasjon på begge sider

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{t}{(1+t^2)} dt$$

$$\ln|x| = \frac{1}{2} \ln(1 + t^2) + C_1$$

$$|x| = C_2(1 + t^2)^{\frac{1}{2}}, \quad C_2 = e^{C_1} > 0$$

$$x(t) = C(1 + t^2)^{\frac{1}{2}}, \quad C = \pm e^{C_1} \neq 0$$

$$x(0) = C = 3$$

$$x(t) = 3(1 + t^2)^{\frac{1}{2}},$$

for alle reelle verdier av t .

Linære 1. ordens differensialligninger

$$\dot{x} + a(t)x = f(t)$$

der $a(t)$ og $f(t)$ er kontinuerte funksjoner.

Bruker “integrerende faktor”:

$$e^{A(t)} \text{ der } A(t) = \int a(t) dt.$$

$$[\dot{x} + a(t)x] e^{A(t)} = f(t) e^{A(t)}$$

$$\frac{d}{dt}(e^{A(t)}x) = f(t)e^{A(t)}$$

$$e^{A(t)}x = \int f(t)e^{A(t)}$$

$$x(t) = e^{-A(t)} \left(\int f(t)e^{A(t)} dt + C \right)$$

Eksempel

$$\dot{x} - x = t$$

$$A(t) = \int (-1) dt = -t$$

$$e^{A(t)} = e^{-t}$$

$$x = e^t [\int t e^{-t} dt + C]$$

$$x(t) = C e^t - t - 1$$

Eksistens og entydighetssetning for 1. ordens differensialligninger

Betrakt

$$\dot{x} = F(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

Anta videre at F og $\frac{\partial F}{\partial x}$ er kontinuertlig på en åpen mengde $A \subseteq \mathbb{R}^2$, og at $(t_0, x_0) \in A$.

Da eksisterer en løsning $x = x(t)$ definert på et intervall (åpent) om t_0 .

To slike løsninger er like der begge er definert.

2. ordens differensialligninger

2. ordens differensialligninger kan skrives som 1. ordens ligninger, med G av fire variable:

$$G(t, x, \dot{x}, \ddot{x}) = 0$$

der G er en gitt funksjon av 4 variable. I praksis studerer vi som oftest ligninger av typen

$$\ddot{x} = F(t, x, \dot{x})$$

Eksempel.

$$\ddot{x} = t + \sin(t)$$

Integrerer:

$$\dot{x} = \frac{1}{2}t^2 + (?)\cos(t) + A$$

Integrerer nok en gang:

$$x = \frac{1}{6}t^3 - \sin(t) + At + B$$

Konstantene A og B kan velges fritt.

Eksempel.

$$\ddot{x} = t + \dot{x}$$

I dette uttrykket forekommer ikke x .

Setter $u = \dot{x}$ og får $\dot{u} = t + u$, som tilsvarer en linær 1. ordens ligning:

$$\dot{u} - u = t$$

Løsningen

$$u = Ae^t - t - 1$$

eksisterer.

$$x = \int (Ae^t - t - 1)dt$$

$$x = Ae^t - \frac{1}{2}t^2 - t + B$$

Hvis vi spesifiserer initialbetingelsene på formen

$$x(t_0) = x_0, \quad \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0$$

kan konstantene A og B bestemmes.

Eksistens og entydighetssetning for 2. ordens differensialligninger

Vi har en eksistens og entydighetssetning for 2. ordens differensialligninger av typen

$$\ddot{x} = F(t, x, \dot{x})$$

$$x(t_0) = x_0, \quad \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0$$

der F , $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}$ er kontinuerte på en delmengde $A \subseteq \mathbb{R}^3$, og at $(t_0, x_0, \dot{x}_0) \in A$.

Det eksisterer en løsning $x = x(t)$ på et åpent intervall om t_0 . To slike løsninger er like der hvor begge er definert (i snittet av definisjonsområdet), altså entydige.

Linære 2. ordens differensialligninger

Det finnes ikke eksplisitte løsningsformler for 2. ordens differensialligninger, slik det gjorde for enkelte 1. ordens differensialligninger.

En linært 2. ordens system kan skrives

$$\ddot{x} + a(t)\dot{x} + b(t)x = f(t)$$

der $a(t), b(t), f(t)$ er kontinuerlige (på et intervall $I \subseteq \mathbb{R}$). Selv ikke homogene ligningssystemer som

$$\ddot{x} + a(t)\dot{x} + b(t)x = 0$$

vil generelt ha noen eksplisitt løsning.

Vi kan imidlertid si mye om strukturen til løsningene:

Den homogene ligningen

$$\ddot{x} + a(t)\dot{x} + b(t)x = 0$$

har den generelle løsningen

$$x = C_1 u_1(t) + C_2 u_2(t)$$

der u_1 og u_2 er to ikke-proporsjonale løsninger av ligningen, og C_1 og C_2 er vilkårlige konstanter som kan velges fritt.

u_1 og u_2 er proporsjonale hvis det finnes en konstant A slik at $u_2 = Au_1$.

Den inhomogene ligningen

$$\ddot{x} + a(t)\dot{x} + b(t)x = f(t)$$

har en generell løsning

$$x(t) = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t) + u^*(t)$$

der $c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t)$ er den generelle løsningen av den homogene ligningen og u^* er en partikulær løsning av den inhomogene ligningen, dvs. en enkelt løsning.

Det holder å kjenne en enkelt løsning av den inhomogene, og den generelle løsningen av den homogene.

Eksempel.

$$\ddot{x} - x = e^t$$

Homogen ligning med konstante koeffisienter

$$\ddot{x} - x = 0$$

Her er $u_1(t) = e^t$ og $u_2(t) = e^{-t}$ løsninger, og opplagt ikke-proporsjonale.

Den inhomogene ligningen i dette tilfellet har partikulær løsning

$$u^*(t) = \frac{1}{2}te^{-t}$$

Den generelle løsningen er:

$$x(t) = C_1u_1(t) + C_2u_2(t) + u^*(t) = C_1e^t + C_2e^{-t} + \frac{1}{2}te^{-t}$$

For ligninger med konstante koeffisienter a og b , finnes det en elementær metode for å bestemme $u_1(t)$ og $u_2(t)$.

Betrakt ligningen

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0$$

der $a, b \in \mathbb{R}$.

Vi vil finne en løsning som er eksponentiell, $x(t) = e^{rt}$.

Innsetting i ligningen over gir

$$r^2e^{rt} + are^{rt} + be^{rt} = 0$$

Faktoreriserer:

$$e^{rt}(r^2 + ar + b) = 0$$

Vi har en løsning.

r er rot i den karakteristiske ligningen $r^2 + ar + b = 0$ som er tilordnet differensialligningen.

Den generelle løsningen blir:

$$x(t) = C_1e^{r_1t} + C_2e^{r_2t}$$

hvis $r_1 \neq r_2$.

r_1, r_2 er løsninger av den karakteristiske ligningen $r^2 + ar + b = 0$.

Hvis $r_1 = r_2 = -\frac{a}{2}$, så får vi løsningen

$$u_1(t) = e^{rt}$$

og tillegg

$$u_2(t) = te^{rt} = te^{rt}$$